Введение

Математика – царица всех наук. Её возлюбленный – истина, её наряд – простота и ясность. Дворец этой владычицы окружён тернистыми зарослями, и, чтобы достичь его, каждому приходится продираться сквозь чащу. Случайный путник не обнаружит во дворце ничего привлекательного, красота его открывается лишь разуму, влюблённому в истину, закалённому в борьбе с трудностями.

Изучая математику очень важно уметь логически мыслить и рассуждать, проводить доказательства, осуществлять цепочки логических выводов, владеть базовыми эвристиками. Достигнуть этого можно путём систематизированного использования обычных арифметических упражнений, а также упражнений на распознавание объектов, принадлежащих и не принадлежащих понятию. В этом плане хорошие возможности представляет материал, связанный с делимостью чисел.

Для выяснения делимости числа а на число b имеется довольно много разнообразных способов. Один из них состоит в непосредственном делении числа а на число b. Однако такое деление часто оказывается слишком долгим и утомительным занятием, и естественно появляется желание установить истинность интересующей нас делимости, не производя фактического деления. Можно надеяться, что более прямые способы выяснения делимости, чем «грубое» деление, будут экономнее и позволят установить факт делимости более коротким путём. Эти методы в действительности оправдываются, и такие способы выяснения делимости существуют. Они называются признаками делимости.

Сущность всякого признака делимости на данное число b состоит в том, что при его помощи вопрос о делимости любого числа а на b сводится к вопросу о делимости на b некоторого числа, меньшего чем а. Таким образом, признак делимости является математическим объектом весьма распространенной, хотя и не бросающей в глаза природы. Это не формула, не теорема, не определение, а некоторый процесс, совершенно такого же типа, что и процесс умножения чисел столбиком, или, скажем процесс вынесение одного за другим членом арифметической прогрессии.

Общеизвестны признаки делимости на 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10:

Признак делимости на 2

Число делится на 2 тогда и только тогда, когда его последняя цифра делится на 2, то есть является чётной.

Признак делимости на 3

Число делится на 3 тогда и только тогда, когда сумма его цифр делится на 3 (так как все числа вида 10^n при делении на 3 дают в остатке единицу).

Признак делимости на 4

Число делится на 4 тогда и только тогда, когда число из двух последних его цифр нули или делится на 4.

Признак делимости на 5

Число делится на 5 тогда и только тогда, когда последняя цифра делится на 5 (то есть равна 0 или 5).

Признак делимости на 6

Число делится на 6 тогда и только тогда, когда оно делится на 2 и на 3.

Признак делимости на 7

Число делится на 7 тогда и только тогда, когда результат вычитания удвоенной последней цифры из этого числа без последней цифры делится на 7 (например, 364 делится на 7, так как 36 - (2 * 4) = 28 делится на 7).

Признак делимости на 8

Число делится на 8 тогда и только тогда, когда три его последние цифры - нули или образуют число, которое делится на 8.

Признак делимости на 9

Число делится на 9 тогда и только тогда, когда сумма его цифр делится на 9.

Признак делимости на 10

Число делится на 10 тогда и только тогда, когда оно оканчивается на ноль.

Эти признаки помогают определить, разделится ли нацело данное число на любое из указанных чисел. Существуют признаки делимости на числа оканчивающиеся цифрами 1, 3, 7, 9. Они удобны для не особо больших чисел и носят познавательный характер, расширяют математический кругозор.

Учитывая выше изложенное, данная научная работа выполнена с ***целью:*** обобщить и более глубже обосновать известные признаки делимости, рассмотреть признаки на числа, оканчивающие на 1, 3, 7, 9, исследовать признаки делимости на 11, найти задачи, требующие нестандартный подход к их решению, применяя признаки делимости.

Гипотеза. Предполагаем, что данные признаки удобны для выяснения делимости числа а на b, применимы для решения нестандартных задач, анализируя и исследуя доказанные теоремы о делимости чисел, найти и доказать другие признаки делимости.

1 Признаки делимости на натуральные числа

1.1 Признаки делимости на19, 29, 39, …

Делимость данного числа на какое-либо из чисел, оканчивающихся цифрами 1, 3, 7, 9. сведем к делимости на это число некоторой суммы, задаваемой определенным образом. Продемонстрируем это на примерах.

Так, при выяснении вопроса о делимости конкретного целого числа на 19 надо рассмотреть сумму из двух слагаемых, первое из которых будет представлять произведение постоянного множителя 2 на цифру единиц данного числа, а второе -число его десятков. Замечаем: если полученная при этом сумма будет делиться на 19, то и испытываемое число будет делиться на 19; если же полученная при этом сумма не будет делиться на 19, то и испытываемое число не будет делиться на 19. Например, числу 247 соответствует построенная указанным способом сумма 2*7 + 24 = 38, 38 делится на 19, следовательно, на 19 делится и 247. Условимся это записывать так:

$$247 \rightarrow 2*7+24 = 38 \Rightarrow 247:19.$$

Приведем еще несколько примеров.

$$19 \rightarrow 2\cdot 9 + 1 = 19 \Rightarrow 19:19,$$
$$38 \rightarrow 2*8 + 3 = 19 \Rightarrow 38:19,$$
$$171 \rightarrow 2*1 + 17 = 19 \Rightarrow 171:19,$$
$$418 \rightarrow 2*8 + 41 = 57 \rightarrow 2*7 + 5 = 19 \Rightarrow 418:19$$
$$39 \rightarrow 2*9 + 3 = 21 \Rightarrow 39 \text{ не } :19.$$

Таким образом, есть гипотеза:

$$ab:19 \leftrightarrow (2b + a):19.$$

В случае выяснения вопроса о делимости на 29 также будем представлять их в виде аналогичной суммы, как и при делимости на 19, но с другим постоянным множителем: теперь он будет равен 3.

Например:

$$29 \to 3*9 + 2 = 29 \Rightarrow 29:29,$$
$$87 \to 3*7 + 8 = 29 \Rightarrow 87:29,$$
$$319 \to 3*9 + 31 = 58 \to 3*8 + 5 = 29 \Rightarrow 319:29.$$

Возникает вторая гипотеза:

$$ab:29 \leftrightarrow (3b + a):29$$

Таким образом можно рассмотреть примеры делимости чисел на 39, 49, 59, ... с постоянными множителями соответственно 4, 5, 6, ...

Проведем в общем виде рассуждения о делимости на числа, оканчивающиеся на 9, т. е. вида 10 m −1, где m € N. Сформулируем признак делимости в виде теоремы (при этом будем использовать тот факт, что любое целое число можно представить в виде (10a+b**).**

Теорема 1.

Число 10a+b делится на 10 m −1, тогда и только тогда, когда на это число делится сумма mb + a.

Доказательство:

Рассмотрим тождество 10a+b = 10 (mb + a) – b (10m- 1). Так как b(10m - 1) делится на 10m – 1, то 10a +b и 10(mb+a) одновременно либо делятся, либо не делятся на 10m – 1.

Теорема доказана.

Например, пусть m = 6, т. е. проверим делимость некоторых чисел на 59:

$$59 \to 6*9 + 5 = 59 \Rightarrow 59:59,$$
$$118 \to 6*8 + 11 = 59 \Rightarrow 118:59,$$
$$177 \to 6*7 + 17 = 59 \Rightarrow 177:59,$$
178→б*8+17 = 65=>178не:59.

В этом случае

$$ab:59 \leftrightarrow (6b+a):59$$

1.2 Признаки делимости на 11, 21, 31, …

Сформулируем теперь признак делимости на числа, оканчивающиеся на цифру 1, т. е. на числа вида 1**0** m +1, где m € N_0 (N_0 - множество, состоящее из всех натуральных чисел и нуля).

Теорема 2.

Число $10a + b$ делится на $10m + 1$ тогда и только тогда, когда на $10m + 1$ делится $mb - a$.

Доказательство теоремы следует из тождества:

$$10a + b = b(10m + 1) - 10(mb - a).$$

Действительно, так как $b(10m + 1)$ делится на $10m + 1$, то $10a + b$ и $10(mb - a)$ одновременно либо делятся, либо не делятся на $10m - 1$.

Теорема доказана.

Например, пусть $m = 7$, т. е. рассмотрим признак делимости на 71:

$$71 \to 7*7 = 0 \Rightarrow 71:71,$$
$$355 \to 7*5 - 35 = 0 \Rightarrow 355:71,$$
$$852 \to 7*2 - 85 = -71 \Rightarrow 852:71,$$
$$242 \to 7*2 - 24 = -10 \Rightarrow 242 \text{ не } :71.$$

В этом случае

$$ab:71 \leftrightarrow (7b - a):71.$$

1.3 Признаки делимости на 13,23,33, …

Теорема 3.

Число $10a + b$ делится на $10k + 3$ тогда и только тогда, когда $(3k+1)b + a$ делится на $10k+3$, где $k \in N_0$.

Доказательство:

Так как $10a + b = 10((3k + 1)b + a) - 3b(10k + 3)$, то $10a + b$ и $(3k + 1)b + a$ одновременно или делятся, или не делятся на $10k + 3$, что и требовалось доказать.

Обратим внимание, что здесь постоянный множитель $m = 3k + 1 \neq k$.

Из теоремы 3 можно получить многочисленные следствия. В частности, удобно пользоваться на практике следующим признаком делимости на 13.

Следствие:

Число $10a+b$ делится на 13 тогда и только тогда, когда $4b + a$ делится на 13. Действительно, при $k=1$ получаем:

$$((10a+b):13) \leftrightarrow ((4b+a):13).$$

Другое доказательство этого следствия основывается на представлении $10a + b$ в виде:

$$13a + 13b - 3a - 12b = 13(a + b) - 3(a + 4b).$$

1.4 Признаки делимости на 7, 17, 27, …

Теорема 4.

Число $10a+b$ делится на $10k-3$ тогда и только тогда, когда $(3k-1)b-a$ делится на $10k-3$, где $k \in N$.

Доказательство:

Поскольку $10a + b = 3b(10k - 3) - 10((3k - 1)b - a)$, то $10a + b$ и $(3k - 1)b-a$ одновременно или делятся, или не делятся на $10k-3$, т. е. утверждение доказано.

Заметим, что и здесь постоянный множитель $m = 3k - 1 \neq k$.

Из теоремы 4 можем получить практические следствия. Так, очень удобно пользоваться следующим признаком делимости на 7.

Следствие:

Число $10a + b$ делится на 7 тогда и только тогда, когда $2b-a$ делится на 7. Действительно, при $k = 1$ получаем:

$$((10a + b):7) \leftrightarrow ((2b - a):7).$$

Другой способ доказательства этого следствия можно получить так. Запишем данное число по-другому:

$$10a + b = 7a + 7b + 3a - 6b = 7(a + b) - 3(2b - a).$$

Первое из двух полученных слагаемых делится на 7. Сумма будет делиться на 7 тогда и только тогда, когда и второе слагаемое будет делиться на 7. А это возможно только тогда, когда $2b-a$ делится на 7.

Например,

$91 \rightarrow 2*1-9 = -7 \Rightarrow 91:7$

$119 \rightarrow 2*9-11 = 7 \Rightarrow 119:7$,

$42 \rightarrow 2*2-4 = 0 \Rightarrow 42:7$,

$163 \rightarrow 2*3-16 = -10 \Rightarrow 163$ не $:7$.

В этом случае

$$ab:7 \leftrightarrow (2b - a):7.$$

Использование признаков делимости на числа, оканчивающиеся на цифру 1, 3, 7, 9, позволяет последовательно переходить к числам, имеющим на один разряд меньше. К ним следует применять тот же признак делимости (например, на 7) до тех пор. пока не доберемся до числа, делимость которого (на 7) проверяется элементарно. Таким образом, получен вполне определенный алгоритм.

2 Разные признаки делимости на 11

1.

Число $10a + b$ делится на 11, если на 11 делится число $b - a$

Например, 9416

$$6-941 = -935$$
$$935 \rightarrow 5-93=-88 : 11$$

Это следует из теоремы 2.

2.

Трёхзначное число кратно 11, если средняя цифра равна сумме крайних цифр.

Пусть например , таким числом будет 385. Убедиться, что это число делится на 11, можно либо непосредственным делением, либо разложением числа на простые множители, либо представлением числа в десятичной системе исчисления. Представим число 385 в виде: 3*100+8*10+5. Вспомним об условии задачи и используем его: 3*100+(3+5)*10+5 = (3*100+3*10)+(5*10+5) = 30 (10 +1)+5(10+1) = 30*11+5*11 = 11*35, т.е. 385:11. Частный случай обнажил способ решения задачи в общем виде. При $b=a+c$ для трёхзначного числа abc, записанного в общем виде, аналогично имеем: $100a+10(a+c)+c=11(10a+c)$. Другой способ (с использованием теоремы 2 при $m=1$) ведёт к рассуждениям сразу в общем виде: $c-(10a+a+c) = -11a:11 \Rightarrow abc:11$. Третий способ: разность между цифрой, стоящей на чётном месте, и суммой остальных цифр равна 0,0:11, значит, и трёхзначное число, обладающее указанным свойством, делится на 11.

3.

Пятизначное число кратно 11, если сумма крайних и средней цифры равна сумме остальных цифр.

Например, 36245 делится на 11, так как 3+5+2=4+6

Доказательство:

Пусть дано пятизначное число $abcde$, причём $a+c+e=b+d$. Докажем, что это число делится 11. Воспользуемся теоремой 2, ($m=1$).

$e - (1000a+100b+10c+d) = b + d - a- c - (1000a -100b-10c-d) = -1001a -11c-99b = -11(91a +c) - 11*9b = -11(91a+c+9b)$ делится на11.

4.

Число делится на 11, если разность между числом, выраженным тремя последними цифрами, и числом, выраженным остальными цифрами, делится на 11.

Например, 93753 $\rightarrow$ 753-93=660:11

5.

Пусть многозначное число N имеет цифру единиц a, цифру десятков b, цифру сотен c, цифру тысяч d и т. д., т. е.

$$N = a + 10b + 100c + 1000d + ... = a + 10(b + 10c + 100d + ...),$$

где многоточие означает сумму дальнейших разрядов. Вычтем из N число 11 (b + 10c + 100 d + ...), кратное одиннадцати. Тогда полученная разность, равная, как легко видеть,

$$a - b - 10(c + 10d + ...),$$

будет иметь тот же остаток от деления на 11, что и число N. Прибавив к этой разности число 11 (c + 10 d +...), кратное одиннадцати, мы получим число

$$a - b + c + 10c + ...),$$

также имеющее тот же остаток от деления на 11, что и число N. Вычтем из него число 11 (d +...), кратное одиннадцати, и т. д. В результате мы получим число

$$a - b + c - d + ... = (a + c + ...) - (b + d + \dots),$$

имеющее тот же остаток от деления на 11, что и исходное число N.

Отсюда вытекает следующий признак делимости на 11: надо из суммы всех цифр, стоящих на нечетных местах, вычесть сумму всех цифр, занимающих четные места; если в разности получится 0 либо число (положительное или отрицательное), кратное 11, то и испытуемое число кратно 11; в противном случае наше число не делится без остатка на 11.

Испытаем, например, число 87 635 064:

$$8 + 6 + 5 + 6 = 25,$$
$$7 + 3 + 0 + 4 = 14,$$
$$25 - 14 = 11.$$

Значит, данное число делится на 11.

6.

Существует и другой признак делимости на 11, удобный для не очень длинных чисел. Он состоит в том, что испытуемое число разбивают справа налево на грани по две цифры в каждой и складывают эти грани. Если полученная сумма делится без остатка на 11, то и испытуемое число кратно 11, в противном случае — нет. Например, пусть требуется, испытать число 528. Разбиваем число на грани (5/28) и складываем обе грани:

$$5 + 28 = 33.$$

Так как 33 делится без остатка на 11, то и число 528 кратно 11:

$$528 : 11 = 48.$$

Докажем этот признак делимости. Разобьем многозначное число N на грани. Тогда мы получим двузначные (или однозначные) числа, которые обозначим (справа налево) через a, b, c и т. д., так что число N можно будет записать в виде:

$$N=a+100b + 1000c +... = a + 100 (b + 100c +...).$$

Вычтем из N число 99 (b + 100c +...), кратное одиннадцати. Полученное число

$$a + (b + 100c +...) = a + b + 100 (c +...)$$

будет иметь тот же остаток от деления на 11, что и число N. Из этого числа вычтем число 99 (c + ...), кратное одиннадцати, и т. д. В результате мы найдем, что число N имеет тот же остаток от деления на 11, что и число

$$a + b + c + ...$$

3 Применение признаков делимости при решении задач

Задача №1 *Номер автомашины*

Прогуливаясь по городу, трое студентов-математиков заметили, что водитель автомашины грубо нарушил правила уличного движения. Номер машины (четырехзначный) ни один из студентов не запомнил, но, так как они были математиками, каждый из них приметил некоторую особенность этого четырехзначного числа. Один из студентов вспомнил, что две первые цифры числа были одинаковы. Второй вспомнил, что две последние цифры также совпадали между собой. Наконец, третий утверждал, что все это четырехзначное число является точным квадратом. Можно ли по этим данным узнать номер машины?

Решение:

Обозначим первую (и вторую) цифру искомого числа через *a,* а третью (и четвертую) — через b. Тогда все число будет равно:

$$1000a + 100a + 106 + b = 1100a + 116 = 11(100a + b).$$

Число это делится на 11, а потому (будучи точным квадратом) оно делится и на 11^2. Иначе говоря, число 100a+ b делится на 11. Применяя любой из двух вышеприведенных признаков делимости на 11, найдем, что на 11 делится число a+ b. Но это значит, что

$$a + b = 11,$$

так как каждая из цифр *a,* b меньше десяти.

Последняя цифра b числа, являющегося точным квадратом, может принимать только следующие значения:

0, 1,4,5,6,9.

Поэтому для цифры a, которая равна 11-b, находим такие возможные значения:

11, 10, 7, 6, 5, 2.

Первые два значения непригодны, и остаются следующие возможности:

$b = 4, a = 7;$
$b = 5, a = 6;$
$b = 6, a = 5;$
$b = 9, a = 2;$

Мы видим, что номер автомашины нужно искать среди дуующих четырех чисел:

7744,6655, 5566, 2299.

Но последние три из этих чисел не являются точными квадратами: число 6655 делится на 5, но не делится на 25; число 55 делится на 2, но не делится на 4, число 2299 = 121 * 19 также не является квадратом. Остается только одно число $7744 = 88^2$ оно и дает решение задачи.

Задача№2

Кузнечик прыгает по прямой, причем в первый раз он прыгнул на 1 см в какую-то сторону, во второй - на 2 см, в третий - на 3 см и т. д. Докажите, что после 125 прыжков он не сможет оказаться в том месте, откуда начинал прыгать в первый раз.

Решение:

По прямой можно двигаться в двух противоположных направлениях. Ясно, что ответ должен годиться для любого варианта последовательности прыжков. Заметим, что кузнечику за 125 прыжков предстоит преодолеть расстояние 1 + 2 + 3 + ... + 124+ 125 = (1 + 1251-125/2 = 7875 см. Но на сколько бы ни отдалился кузнечик от начальной точки, возвращаясь, ему придётся преодолеть это расстояние. Значит, сумма «пропрыганных» расстояний туда и обратно должна вы четным числом, а число 7875 - нечетное кузнечик не сможет после 125 прыжков в ту же точку, из которой он начинал прыгать.

Задача №3

Билет на транспорте считается «счастливым», если сумма первых трех цифр его шестизначного номера совпадает с суммой последних трех цифр. Докажите, что сумма номеров всех «счастливых» билетов делится на 13.

Решение:

а) Пусть p, q - трехзначные грани «счастливого» номера. Если p = q , то номер pq: 13 (разность трехзначных граней p-q должна делиться на 13). Если p≠q, то номер pq сложим с номером qp:pq + qp = pp + qq, их сумма делится на 13.

Заключение

Приведённый материал вполне доступен учащимся средних и старших классов. Он содержит элементы творчества, может вызвать у них интерес к теории чисел и содействовать развитию навыков точных рассуждений. Решение же нестандартных задач важно не только само по себе, но и как средство развития исследовательских навыков.

В данной работе мы рассмотрели самые разнообразные признаки делимости. Практической целью построения всех этих признаков является получение удобно работающих алгоритмов, обнаруживающих, равны эти остатки нулю или нет (признаки делимости).

Несомненно, что некоторые признаки делимости, такие, как при делении на 2, 3, 5, 6, 8, 10, 11 в десятичной системе счисления, действительно оказались весьма практичными и удобными. Применение других связано с более или менее громоздкими вычислениями.

Естественно поэтому искать и применять такие признаки делимости, использования которых приводит к цели по возможности более простым путём.

Однако знание данных признаков позволяют находить решение нестандартных задач, связанных с делимостью чисел.